Exquisitely accurate energies for the general quartic oscillator: Supplemental Information

Pavel Okun, Kieron Burke
Department of Chemistry, University of California, Irvine, CA 92697, USA and Departments of Physics and Astronomy and of Chemistry
(Dated: Sunday 30th August, 2020)

n	$\lambda = -1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1/2$
0	0.6209270298257486608580357329871206982000	0.4208049744754477632073387069472240693432	0.2969675302972151588212005493833645945082
1	2.0259661641666569970850703427960975727209	1.5079012411604822141183717271129771258040	1.2083664545337553244675128781490877007052
2	3.6984503193780828535724670322135994784906	2.9587956874793210438093895440143405907473	2.5549656461358335669363203892249780748117
3	5.5575771385568190043356690869633769327987	4.6212203186659158345199462032646287773490	4.1185132911873791789827356847060866472967
4	7.5684228735599952483040236007700297795874	6.4535099323116714688390801378688895232907	5.8615290772456843939267326829532388801763
5	9.7091478766133491585283420979384357791199	8.4284538781251624410812759084851264487491	7.7535437904317968231655053084272429114240
6	11.9645436206307893693476637072524067567336	10.5278307660214238235047658353664143415435	9.7748772610230392921405211594194456457452
7	14.3232651989715130212955084127970016404927	12.7383369432737903427451672925556149750443	11.9112456942270964580082777754683535757181
8	16.7764527862477299481795270148716610404336	15.0497529310262142774202965577869187310261	14.1517497832384947562615037963742371519444
9	19.3169543039861738015603041224460630143480	17.4539341576043532672221679689954879136362	16.4877481831099757519730264219436557939311
10	21.9388493623736883118412614839274832048677	19.9442078219410104858697265744541155274941	18.9121913414809377170587410723808518620447
11	24.6371393784850827234483399467490277731788	22.5149877684426714142542318593734791245252	21.4191988384016334155749968573601998934125
12	27.4075361599007733167185785640547638285198	25.1615158711766884276146901754352125654444	24.0037771856458996617329273486803658710224
13	30.2463121638354802813346902742580711908208	27.8796812841877656582298671760453383565028	26.6616235644061192930466358802950389698173
14	33.1501911449899797647855437419461171831573	30.6658899335127314628439893169538951067637	29.3889847264493968907502226461423327368738
15	36.1162662359316612997904513472041145489241	33.5169677028528987634937196368642936314747	32.1825527201796215069940450096463713573417
16	39.1419372382007939004180627624271107209340	36.4300869553098956349617834567278369397641	35.0393860174731882492006918400771100061893
17	42.2248617205992722354303466637426801349502	39.4027096653309522764323911075252220491304	37.9568486543314530223356956562434008727611
18	45.3629162655749501221305299308397198651343	42.4325426544203398670711200468442512975238	40.9325624549159822838446125803113988960005
19	48.5541653210865955322219587604320298774269	45.5175018286087836091156740676820857337808	43.9643689568979728052340425260495584501329
n	$\lambda = 1$	$\lambda = \lambda_c$	$\lambda = 2$
0	0.1472351400900356499691248977564660173258	-0.0000000000000000000000000000000000000000	-0.2995213674158870148305588119678013665817
1	0.8722611979074849376077725041342821484402	0.5716588679960030376877118960876601938386	0.0463710822278322225551254617719892396217
2	2.1279787487595877045538224256388430610159	1.7736948620145091772993229646471235886632	1.2279728124733779318126911954478247721008
3	3.5910891429085531474677426173361466615617	3.1528326580224174810921481032323232487809	2.4598414289848618278734212356647449784682
4	5.2451344076798266430684130776728360862553	4.7363694975061665860330732922691834287200	3.9382196689232610660221519101427068696605
5	7.0543309765744167117016069821477629262677	6.4796199486673050896924411810029763381620	5.5812919464200356086062138581050168522645
6	8.9977152866347239207805152219715373495070	8.3609827938705988454021151460423261599059	7.3688888891530412336227399929097153100735
7	11.0600197362083473113526351645076563394713	10.3643546811859909563918554922259918339922	9.2832226299648909849830922749761888287342 6
8	13.2296716965972822290602839111253872627 57	12.4776265015870503319630402009506998689629	11.3113496812053433661018404740221218764899
9	15.4975367732762450862155724272143845256796	14.6912708225153021462064097897940203073039	13.4431253746146181822961187485295612840726
10	17.8561912029006493999576787885895573682737	16.9975664549772044605549383045427198392948	15.6703699687296553967537802445771571591652
11	20.2994620601279773169062848753786930728930	19.3901082427550754621639190325828280149029	17.9863231152929266903954684521570229693708
12	22.8221217502876403219503896506332221428776	21.8634828235108640404426731524651415625608	20.3852887904825910828332734073819599201359
13	25.4196764022940486530210893302948537481785	24.4130447540232097527558401520261731285525	22.8623916753093559460983299855869625178436
14	28.0882142843477951830862545628663297491065	27.0347565735505259647623769404174440869892	25.4134040381637348805306139183152990003897
15	30.8242941384532552138898486648626838905608	29.7250712630490587442470044304579531460627	28.0346190393585560070298786629180414903382
16	33.6248609575586778848715479117742888261600	32.4808437755606569236339263329500479754022	30.7227557029688189378854855857924222071042
17	36.4871811657174959586755707609740381069210	35.2992630749155671032364812414301202000714	33.4748861345856088549750625423586830442841
18	39.4087918519281065606950050769764515801679	38.1777989988783344057067262022906053148024	36.2883787630669702226446175430707502923971
19	42.3874603986599763607484603391513404125215	41.1141600671899623565300558968349506123263	39.1608533771374500623766820576210674574060
n	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$	$\lambda = 16$
0	-2.6614480668299258763230139306673458375429	-14.0324444018052994432537497688658953282978	-61.1873976097239347040519514878376408475110
1	-2.6517317169216879626798264247619112670590	-14.0324443753846106821056639056976599894887	-61.1873976097239347040519507432046834481584
2	-0.5102930381327473696110504044071024379800	-10.2374181022536577826397549201626978893469	-55.6270328066566950481384614788601681896687
3	-0.1807894330622582818165542233132232566996	-10.2374126036757771174222559086720970290432	-55.6270328066566950481379569833156389101676
4	1.1695143365947340664211154850717789208582	-6.6843927138660009112120807253579250040901	-50.1677907702224152602395145875345725833160
5	2.3643918923460492284769310044183117645863	-6.6839252868713098232048203999239475485623	-50.1677907702224152600774529069586335173511
6	3.8357948326004093266558747356504382940929	-3.4521491483210872751782055732716385290964	-44.8154388106509680002392073351225222773039
7	5.4430045231550815592562510060115461795846	-3.4323617805610231231123996788750204987627	-44.8154388106509679674606247338249029676026
8	7.1832349741044744228694202343455748298609	-0.8436487231434934433791826110408175496539	-39.5766864040676713567900013956791558340159
9	9.0398481121463461930986519520826284005100	-0.5042404268290690707095844038061155129498	-39.5766864040676666831144013830302553496714
10	11.0025188337220857851315919678616051381955	1.1615932648322248170487151971678725823886	-34.4594623366015919928440409675286441966089
11	13.0627969100066585323849398998537049950316	2.3918554218704864477402234706269532999536	-34.4594623366010937848302698406235040845512
12	15.2137826575078115399041761005777164302396	3.9821840692096918952249865418185404041377	-29.4733189381534883371911762187717947850975
13	17.4496779348669813230194759912660986824602	5.6581105244767300215025449175194901075413	-29.4733189381124209160128178684499808471623
14	19.7655245277330684324543398617660707059238	7.4555769375507348817071475302379978220562	-24.6300488773159008572118670474641144980755
15	22.1570215163914948104597068950418213904794	9.3507619349088529032629887250749107416157	-24.6300488746474233947975266198680141507504
16	24.6203946769103286322488223100432640789732	11.3367520808885588886234641628154072096683	-19.9446824518702288293797651016978129099597
17	27.1522997333404608833611045353925571172 27	13.4065360556998380563145435100523133286453	-19.9446823139694465593687674516291436652453
18	29.7497488149246926808474288802922162419641	15.5547993768313120592069318313123633281790	-15.4372324690911890964651244057502958813076
19	32.4100533460587587533833010330720289301049	17.7770953113984742550117244948104017128921	-15.4372268038006350393996616788105217144393

TABLE S1. Exact energies given to 40 digits.

n	$\lambda = 0$	$\lambda = \lambda_c$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$
0	$-9.75882523689181948615315759581320272169 84 \times 10^{-01}$	$-8.98913353782169594297481351043792639922 13 \times 10^{-01}$	$2.63667369609049100803381412375754716837 07 \times 10^{-01}$	$-1.22843450417482259484858853504119224420 56 \times 10^{-02}$
2	$-2.17107639207983900164688309737431570430 24 \times 10^{-01}$	$-4.18937512045555034339538492799835578928 94 \times 10^{-01}$	$5.95256139450487266887107451731109565057 24 \times 10^{-01}$	$-9.50005617276189611120741243214973595548 2 \times 10^{-02}$
4	$-2.22618906331469422974950239941674416776 13 \times 10^{-02}$	$-1.27549289310290045885603710473004041927 16 \times 10^{-01}$	$6.37550923968692925126769195535777799959 564 \times 10^{-01}$	$-2.88950501022842646332646926488012694190 9 \times 10^{-01}$
6	$4.55915577875464297058040036012422374869 74 \times 10^{-03}$	$-1.21972247942544659504558749212463058347 0 \times 10^{-02}$	$3.92525765372165702934214641639527347336 \times 10^{-01}$	$-5.17510058002896499925480778561455873272 07 \times 10^{-01}$
8	$1.05254771499716134253525737716279497213 15 \times 10^{-03}$	$5.22380315076926781885838388919056156203 12 \times 10^{-03}$	$1.24260359349298886294920959034275977716 32 \times 10^{-01}$	$-6.06447612777633218308525288700761425855 10 \times 10^{-01}$
10	$-2.91037200207796826734378311288086393462 750 \times 10^{-04}$	$1.04153379424029975887582299456042332647 00 \times 10^{-03}$	$4.52187828806045218805655991782799198261 8 \times 10^{-4}$	$-4.70365466743509636060114739746871411511 05 \times 10^{-01}$
12	$-4.43155560156764899604135295397635091577 54 \times 10^{-05}$	$-4.13665707165720735870046322419839195906 4 \times 10^{-04}$	$-1.25486037684007983944300439713211013 19 \times 10^{-02}$	$-2.20493437599304707155706501673069547638 7 \times 10^{-01}$
14	$2.73852667528397703138292137035358069993 31 \times 10^{-05}$	$-6.11953081110039262842323177557756362452 08 \times 10^{-05}$	$-1.21759622011151029577087104686816048151 35 \times 10^{-03}$	$-3.49872440759333808371615423270092693923 14 \times 10^{-02}$
16	$-7.97950517363737678197527762512629801006 50 \times 10^{-07}$	$4.57758035268381294695399542833397121378 55 \times 10^{-05}$	$1.46422108132766740710713893120899003573 57 \times 10^{-3}$	$2.26797425390343760056812499114593898464 13 \times 10^{-02}$
18	$-2.32555739941029937789370685561431882510 51 \times 10^{-06}$	$-7.38566494736124541769615640695244593831 29 \times 10^{-07}$	$1.01848747571332441006993954359730761633 82 \times 10^{-04}$	$1.12881885411250574760751792173757062471 92 \times 10^{-02}$
20	$6.04056799732212605345312131714832796556 85 \times 10^{-07}$	$-4.83047825008675270354716272649818261808 64 \times 10^{-06}$	$-2.02914621184637969531138268205875488014 65 \times 10^{-04}$	$-2.08729731466697477802678905069982736484 40 \times 10^{-03}$
22	$8.89084246879989488578431265839553875675 07 \times 10^{-08}$	$1.13915562412507290798315061371877305179 43 \times 10^{-06}$	$1.19714256316661717476370840654819453485 37 \times 10^{-05}$	$-2.16115235597640225666309732289000287552 57 \times 10^{-03}$
24	$-9.11790593866706987060174098882358399857 27 \times 10^{-08}$	$3.02820681653622693406388671392706236038 11 \times 10^{-07}$	$2.72531598776260261846520464246956024731 64 \times 10^{-05}$	$3.26416544078265347846723093598329593707 374 \times 10^{-04}$
26	$1.71568239876052958676734611891682964738 64 \times 10^{-08}$	$-2.26500315559487653292402855934133191689 73 \times 10^{-07}$	$-7.26421939531977229884014849636076876976 95 \times 10^{-06}$	$3.89843046869282727325878200300980623863 20 \times 10^{-04}$
28	$5.49778889433822730701259197318745063399 84 \times 10^{-09}$	$2.72796106282447187350689989026167983964 69 \times 10^{-08}$	$-2.51615819599130668550755980931687412640 41 \times 10^{-06}$	$-9.20218976136047146084956542499652833542 49 \times 10^{-05}$
30	$-4.03881463666596254001705595403162371603 752 \times 10^{-09}$	$2.22223910956211878876813612822501844441 94 \times 10^{-08}$	$1.80557945605077566041508096566077937510 33 \times 10^{-06}$	$-6.42473852627713234129302346691784313271 81 \times 10^{-05}$
32	$7.36844747493561360427339984700028956076 17 \times 10^{-10}$	$-1.13762242071588256541524784623438443532 11 \times 10^{-08}$	$-1.05217333263949674851978408021085322222 554 \times 10^{-07}$	$2.82126579523479103906427832688128429425 31 \times 10^{-05}$
34	$2.67406684658091838466230788348033441489 088 \times 10^{-10}$	$8.38219855040349729123282502100519019681 54 \times 10^{-10}$	$-2.68904420219746077080505588926118417512 08 \times 10^{-07}$	$7.46434277556189583364634499275034577028 70 \times 10^{-06}$
36	$-2.07988185000452274922927834301439204525 27 \times 10^{-10}$	$1.38722079937438208033317877918972462925 61 \times 10^{-09}$	$1.06865000646620852199433344215920235035 79 \times 10^{-07}$	$-7.40240812918891806415964407161661159495 59 \times 10^{-06}$
38	$4.67502320674050788603341279730607105239 26 \times 10^{-11}$	$-6.73121133794015294043666473826161032647 19 \times 10^{-10}$	$9.41348163937968811427108907695618104555 47 \times 10^{-09}$	$3.13373034963644931509896744365623043201 67 \times 10^{-06}$
40	$1.08342317790961824356291734307185303745 98 \times 10^{-11}$	$5.64453476764406452323875538436897405190 94 \times 10^{-11}$	$-2.24971114530046832469522980662109926135 25 \times 10^{-08}$	$1.46572001619767698291311161815286588392 41 \times 10^{-06}$
42	$-1.18040127248637191422587706418501841990 93 \times 10^{-11}$	$8.45133906942397832558596695163469717546 \times 10^{-11}$	$7.01124650422429944763598895050808865796 93 \times 10^{-09}$	$-5.07925121694566121929387042491270825726 1 \times 10^{-07}$
44	$3.64467030359838571364804283924405090482 17 \times 10^{-12}$	$-4.62501203166134739147404043935641725785 06 \times 10^{-11}$	$1.31751933613073865952553494572314285277 7 \times 10^{-09}$	$-1.51398476162108271089840683923993533345 43 \times 10^{-07}$
46	$1.78201800848045979385096763219542249327 26 \times 10^{-13}$	$6.66075399047955984644373391408230741756 25 \times 10^{-12}$	$-1.86881861221896922434020821617110374820 29 \times 10^{-09}$	$1.62928184595994963797282769706321115567 77 \times 10^{-07}$
48	$-6.73230561885900482044875904587213340613 66 \times 10^{-13}$	$4.82714531356941797997554462306375973202 08 \times 10^{-12}$	$5.61436482588950847345872297676598747122 69 \times 10^{-10}$	$-2.59116125011568418820437652531584328351 12 \times 10^{-08}$
50	$2.98333972037976984739324969784759494367 35 \times 10^{-13}$	$-3.45796577839686809191212033171458561982 50 \times 10^{-12}$	$1.09588241004299816929063275597384872993 4 \times 10^{-10}$	$-2.64490829751559405659035787307687634899 12 \times 10^{-08}$
52	$-3.55125031864879945287668554867513030029 79 \times 10^{-14}$	$8.30263131379811058490336598105597467590 9 \times 10^{-13}$	$-1.60874046750252868802277015452944437871 295 \times 10^{-10}$	$1.64205635550298541024672752738285390169 37 \times 10^{-08}$
54	$-3.29118464741862385119732889881431539363 09 \times 10^{-14}$	$2.09035464398673511503327469378163492392 62 \times 10^{-13}$	$5.46261749128128053602971273620632996761 67 \times 10^{-11}$	$-8.06170488970319895781124727420152759308 87 \times 10^{-10}$
56	$2.32318618791769941120228305533338399266 214 \times 10^{-14}$	$-2.58481823611694228866791997155570037936389 \times 10^{-13}$	$5.81325014407431336640517973468238696796 7 \times 10^{-12}$	$-3.43169701667084812984249066576742386753 \times 10^{-09}$
58	$-6.45939996391086472306392178682839107557 97 \times 10^{-15}$	$9.55374822941580701743289089890642266087 \times 10^{-14}$	$-1.40517089508791159067955720383619895329 30 \times 10^{-11}$	$1.71923180075878322797175169919275679016 71 \times 10^{-09}$
60	$-6.93252436320493758436038806807698565474 13 \times 10^{-16}$	$-1.90456096953935180119810350909936738967 33 \times 10^{-15}$	$5.96697698072479030697444235780905723144 74 \times 10^{-12}$	$1.33168735808551877500747383758620569616 19 \times 10^{-11}$
Norm. Error	$2.98175684003172846531826823857675938957 5 \times 10^{-30}$	$3.98822153511200943719399721089077619505 0 \times 10^{-28}$	$1.87207702716528661398153220433946232836 36 \times 10^{-24}$	$2.12729478597204670402906521220398735189 05 \times 10^{-19}$

TABLE S2. The expansion coefficients of the ground state for several values of λ calculated with [2/200]. The normalization error is defined as Norm. Error $= 1 - \sum_{n=0}^{30} c_{2n}^2$. All entries are accurate for all digits shown.

λ	$\langle p^2 \rangle$	$\langle x^2 \rangle$	$\langle x^4 \rangle$	$\langle p^2 \rangle + \lambda \langle x^2 \rangle - \langle x^4 \rangle$
-1	0.709622622710046948163156619426399841359 24	0.354840251172853798942673073669283268722 34	0.354782371537193149220483545757511657263 690	-1.0×10^{-69}
0	0.561073299300597017609784942596298759124 25	0.456119955747552664125689993364886244533 73	0.561073299300597017609784942596298759124 25	-3.8×10^{-68}
$\frac{1}{2}$	0.485952830769972020570037703484774894873 410	0.539976742242110852850621825841576936339 32	0.755941201891027446995348616405537416906 76	-3.2×10^{-66}
1	0.418753083785137246918808276211103099209 885	0.667318690995269140879925237607228906993 52	1.086071774780406387798733513818259899092 36	9.6×10^{-67}
λ_c	0.382887310308007492295827499082692198385 26	0.821494661767803555590234075223458747363 35	1.531549241232029969183309996330766793541 17	0.0×10^{-40}
2	0.405383825213677624841681842355232991735 70	1.207118472652290466923640387468452220766 89	2.819620770518258558688962617292137433269 49	1.2×10^{-63}
4	1.223028108930722187477709007470623843124 44	3.578719148527967516931295686270313719886 25	15.537904703042592255202891752551878722669 44	9.7×10^{-60}
8	1.933808050775928087472941140282357803281 91	7.741400219943622754429227812038831840379 62	63.865009810324910122906763636593012526318 85	-1.6×10^{-51}

TABLE S3. Testing the virial theorem on the ground state in the basis [2/200] for various λ.

λ	ϵ_{ZP}	$\Delta\epsilon$
-1.0	0.6209270298257486608583057329871206982000 2	$1.4050391343409083362270346098089768745208 \times 10^{-0}$
-0.9	0.6029963222696462884479823139357906411641 2	$1.3751166990600236139114185321635452644040 \times 10^{-0}$
-0.8	0.5846740740133447885844669819336398988428	$1.3448018746401551940280748998539462115265 \times 10^{-0}$
-0.7	0.5659376866720897331138981869210652434509 9	$1.3140853140631193365254355121211365308478 \times 10^{-0}$
-0.6	0.5467625672840826386406741013004685482152	$1.2829578098203442558192144577403628641190 \times 10^{-0}$
-0.5	0.5271218991063171894816084747522551160055	$1.2514103967290150110732296148266232837839 \times 10^{-0}$
-0.4	0.5069863809481881888729540034905996396077 6	$1.2194344778284042769140563256722639977853 \times 10^{-0}$
-0.3	0.4863239302177912571465126582585229539974 3	$1.1870219779052869196890031652748767144085 \times 10^{-0}$
-0.2	0.4650993440924516521804865217974199202322 5	$1.1541655300384905427168316854046433487992 \times 10^{-0}$
-0.1	0.4432739125674714731202844741697456611339	$1.1208587015272327908233317548892182205668 \times 10^{-0}$
0.0	0.4208049744754477632073387069472240693431 9	$1.0870962666850344509110330201657530564608 \times 10^{-0}$
0.1	0.4001454123904991501565520289505700449673 2	$1.0528745352429691823424756146892005253677 \times 10^{-0}$
0.2	0.3837430693687179277484300039933618090569 2	$1.0181917465029299214242205320914791197489 \times 10^{-0}$
0.3	0.3715400840198463058896098268623189353254 9	$9.8304854088319486418257971399998175236849 \times 10^{-1}$
0.4	0.3634721274259981729856178995251197038294 5	$9.4744852204198535827549906077458178738227 \times 10^{-1}$
0.5	0.3594675302972151588212005493833645945081 6	$9.1139892423654016564631232876572310619703 \times 10^{-1}$
0.6	0.3594462863937044346282079624424387599154 3	$8.7491140078599896968941055709766129850312 \times 10^{-1}$
0.7	0.3633189184440119822044058119272681036034 5	$8.3800295015483345935974872247581416559151 \times 10^{-1}$
0.8	0.3709851939082107385374467736810932609061 9	$8.0069699579858230964730291789504576910103 \times 10^{-1}$
0.9	0.3823326808722830502963045855134894431594	$7.6302463383245331359843389987475231600721 \times 10^{-1}$
1.0	0.3972351400900356499691248977564660173256	$7.2502605781744928678364760637781613111446 \times 10^{-1}$
1.1	0.4155507590528485026967929386263402747515	$6.8675216115574772785403996013260132180676 \times 10^{-1}$
1.2	0.4371202497286486913192126308719687873333	$6.4826630296005290613509983024275992615350 \times 10^{-1}$
1.3	0.4617648554513758383222167107250112808877 1	$6.0964620058917679728128761061240051872668 \times 10^{-1}$
1.4	0.4892843468138093252618434658957806554081 5	$5.7098587881161888311010534076421846183981 \times 10^{-1}$
1.5	0.5194551336220102692835478095431054721775 8	$5.3239755938515668689983574067719278771953 \times 10^{-1}$
1.6	0.5520286812739345614625871677293516471269 2	$4.9401331434894835185037107761821939227067 \times 10^{-1}$
1.7	0.5867304939898976359329747469702822304568 8	$4.5598623271756178977257728951253039247290 \times 10^{-1}$
1.8	0.6232600078226618745031198364961968051890 8	$4.1849076971005900299967590231490230188190 \times 10^{-1}$
1.9	0.6612918089766122103471107367154987902592 5	$3.8172187430012034691909211233590839964834 \times 10^{-1}$
2.0	0.7004786325841129851694411880321986334183 3	$3.4589244964371923738568427373979060620339 \times 10^{-1}$
2.1	0.7404565675179354355629774996687695452010 4	$3.1122872787829673232852391573241979544497 \times 10^{-1}$
2.2	0.7808527521053819857854837304745112142112 6	$2.7796327774199604817854862992449978000166 \times 10^{-1}$
2.3	0.8212955606174532218265850921082130275140 9	$2.4632564354606722765049741839955396695579 \times 10^{-1}$
2.4	0.8614268509413552144781574720424095729840	$2.1653103753875066326339072313185707851793 \times 10^{-1}$
2.5	0.9009153288444405142403127106767991045011 9	$1.8876801593314337098477735325258520829547 \times 10^{-1}$
2.6	0.9394696124581847450493459761514448462733 9	$1.6318653348952627884979765105200671202821 \times 10^{-1}$
2.7	0.9768493248334844117801403427934224784654 7	$1.3988802033057390329223388125239158098869 \times 10^{-1}$
2.8	1.0128726509155383073457545652026633199520 5	$1.1891901003987891328858434406118046691496 \times 10^{-1}$
2.9	1.0474193070791550169973996872011949893587 4	$1.0026933176210712058637366222793647465800 \times 10^{-1}$
3.0	1.0804286694168041956843113185926627787675	$8.3875078659544046104422960854141328549576 \times 10^{-2}$
3.1	1.1118936534977801489483572061313985249734 8	$6.9625719425334852972642078483686106686743 \times 10^{-2}$
3.2	1.1418515780434133770673078278297023830521 9	$5.7374082131274903868486094877790640131769 \times 10^{-2}$
3.3	1.1703735278065649238427427163110719048152	$4.6947665787295806496556615913278874617551 \times 10^{-2}$
3.4	1.1975536411713405844118253513516852861762 6	$3.8159830575992726850779420745286423643317 \times 10^{-2}$
3.5	1.2234994092691067949100977379106553891110 9	$3.0819769492830925530425153918943404031434 \times 10^{-2}$
3.6	1.2483236324903709797712305844140953928066 4	$2.4740615018333114186125336647150711310158 \times 10^{-2}$
3.7	1.2721382731621168844871383737947435601718 9	$1.9745452707883447866585594904011205567527 \times 10^{-2}$
3.8	1.2950501405666453467324252449178011976683 8	$1.5671325524158315378419332481735730221177 \times 10^{-2}$
3.9	1.3171581640135163986525569171362158759862 3	$1.2371500431668495730106131763125365198563 \times 10^{-2}$
4.0	1.3385519331700741236769860693326541624570 8	$9.7163499082379136431875059054345704839343 \times 10^{-3}$
4.1	1.3593111804028073031842613274637283642792 01	$7.5932074094905055157187782958462932145716 \times 10^{-3}$
4.2	1.3795059163675298113061887970396478104816 7	$5.9055187708652852174274643546950108377511 \times 10^{-3}$
4.3	1.3991969838385609073091239536091030513653 3	$4.5715551589515568970514585700712973116190 \times 10^{-3}$
4.4	1.4184368507035477182488343465002391768889 3	$3.5228931453146243630821718978213512658769 \times 10^{-3}$
4.5	1.4372705131503626300222315506862829397464 3	$2.7028124016803728740771084600651645279280 \times 10^{-3}$
4.6	1.4557364211277761812762686616457748816906 2	$2.0647151777248071188829247572436858948968 \times 10^{-3}$
4.7	1.4738673697869317920395247620208789463613 3	$1.5706349720270040415072252652820979744935 \times 10^{-3}$
4.8	1.4916913238187904927517560707170937428933 9	$1.1898739683345029873121740413665681732361 \times 10^{-3}$
4.9	1.5092321579219627127934130806673816210217 3	$8.9778856323548681311254855617471183212927 \times 10^{-4}$
5.0	1.5265103076297635852228319064472006511344 6	$6.7472818643965346851187809866564543341188 \times 10^{-4}$
5.1	1.5435433317738836144826144893739238836145 9	$5.0512323352521319469615727925036261857589 \times 10^{-4}$
5.2	1.5603463920859012018491243304666937020815 6	$3.7671210909198439225958135329624669159761 \times 10^{-4}$
5.3	1.5769326577026806753511746075575983555914 4	$2.7989414843849389130603193469809827015170 \times 10^{-4}$
5.4	1.5933136432920779241281699720547008801246 7	$2.0719378468138621419557320861418463764247 \times 10^{-4}$
5.5	1.6094994896179403800715877598825096498672 2	$1.5282116884112167535087805873088229492202 \times 10^{-4}$
5.6	1.6254991949479024939769300185034069173959 2	$1.1231509218305786768051396881601758100642 \times 10^{-4}$
5.7	1.6413208050016369247957807677577713211367 5	$8.2255179762697894570370375023656230888559 \times 10^{-5}$
5.8	1.6569715682942940972819785935493794253990 7	$6.0031690599786056690293062049561302619933 \times 10^{-5}$
5.9	1.6724580628498173736524544719558239139526 4	$4.3662713149159382641171716887986553895338 \times 10^{-5}$
6.0	1.6877862994040712480304590286546386363759	$3.1649978415005754030679041765499957469812 \times 10^{-5}$
6.1	1.7029618054246569182462572398773102631102 1	$2.2865860656074198828686947575121671356759 \times 10^{-5}$
6.2	1.7179896935616238814369404624231843045239 8	$1.6465359482304028840146632006319000101076 \times 10^{-5}$
6.3	1.7328747175180173676857854256303990966757 8	$1.1817939893854221014674611055385316725886 \times 10^{-5}$
6.4	1.7476213177908457725213570953920325661256 4	$8.4550449100027037869708136352867731984463 \times 10^{-6}$
6.5	1.7622336592766012268276587239875757169333	$6.0298942490602010084911548282466379150117 \times 10^{-6}$
6.6	1.7767156623534249009806117848495024260342 5	$4.2868527685477105919919000260260566479292 \times 10^{-6}$
6.7	1.7910710287357695818679893825405294799587 4	$3.0382075670596470239716086191584004070007 \times 10^{-6}$
6.8	1.8053032631381560571976195710091028521670 9	$2.1466473231063383744483106596348708677531 \times 10^{-6}$
6.9	1.8194156915738769971252456181111528635912 4	$1.5121060000153314738892984391111778847897 \times 10^{-6}$
7.0	1.8334114769444775149407554976225090643419 1	$1.0619290128318458839696765073793069464257 \times 10^{-6}$
7.1	1.8472936324395790366076484146159312826407 9	$7.4355559422994055230904848405574087749348 \times 10^{-7}$
7.2	1.8610650331580471307641882879703436997155 6	$5.1909721677295689603051136596789990038775 \times 10^{-7}$
7.3	1.8747284262754505645655413898680076540418 0	$3.6133784326113664349515192977479612893014 \times 10^{-7}$
7.4	1.8882864400148444073293759824331036073734 1	$2.5079537135762514013924411972571341080399 \times 10^{-7}$
7.5	1.9017415916245120011357782712210127323257	$1.7357148773654877924571962961217335992384 \times 10^{-7}$
7.6	1.9150962945244328637562651655022655019737 8	$1.1978465926873801339823410252260274864434 \times 10^{-7}$
7.7	1.9283528647504861734715488533919319214288	$8.2432561597168695731282577658808280215263 \times 10^{-8}$
7.8	1.9415135267997996866903678523935455457003 8	$5.6569416417113789095064194534589161373 01 \times 10^{-8}$
7.9	1.9545804189606525155881581966924154129519 7	$3.8713296557554231694188905036612432355486 \times 10^{-8}$
8.0	1.9675555981947005567462502311341046717022 0	$2.6420688761148085863168235338809066342446 \times 10^{-8}$

TABLE S4. Zero point energy (ϵ_{zp}) and energy difference between the first excited and ground states ($\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_0$). All calculations made with [2/200].

	$\Delta E_0 \times 10^{17}$			$\Delta E_{19} \times 10^{2}$		
ω	$N_B = 40$	$N_B = 50$	$N_B = 60$	$N_B = 40$	$N_B = 50$	$N_B = 60$
1.0	$2.8316898104 \times 10^{+04}$	$7.6749053454 \times 10^{+01}$	$1.1671394475 \times 10^{-00}$	$9.7444572767 \times 10^{+02}$	$8.3352481902 \times 10^{+01}$	$1.2928179048 \times 10^{-00}$
1.1	$1.4303248620 \times 10^{+04}$	$4.6384048355 \times 10^{+01}$	$1.6780669551 \times 10^{-01}$	$4.5861040726 \times 10^{+02}$	$5.9258296585 \times 10^{-00}$	$4.6630523664 \times 10^{-01}$
1.2	$4.1469925551 \times 10^{+02}$	$9.1180293837 \times 10^{-01}$	$3.6207836723 \times 10^{-03}$	$1.5887415607 \times 10^{+02}$	$1.9298196092 \times 10^{-00}$	$1.1600275198 \times 10^{-02}$
1.3	$2.8742793086 \times 10^{+02}$	$5.2200569899 \times 10^{-01}$	$1.1126424115 \times 10^{-03}$	$2.9392576233 \times 10^{+01}$	$7.6207973910 \times 10^{-01}$	$7.3423754374 \times 10^{-03}$
1.4	$4.2356801829 \times 10^{+01}$	$2.1693812097 \times 10^{-02}$	$1.9273478687 \times 10^{-05}$	$3.3821922647 \times 10^{-00}$	$3.7361785356 \times 10^{-02}$	$4.2502441003 \times 10^{-04}$
1.5	$3.4693712760 \times 10^{-00}$	$7.5543662000 \times 10^{-03}$	$1.0429735781 \times 10^{-05}$	$3.6273522076 \times 10^{-00}$	$2.1806061116 \times 10^{-02}$	$9.1774434632 \times 10^{-05}$
1.6	$2.8212055885 \times 10^{-00}$	$7.6197300492 \times 10^{-04}$	$1.7298724883 \times 10^{-07}$	$1.4578570253 \times 10^{-00}$	$5.4608563291 \times 10^{-03}$	$1.5285380353 \times 10^{-05}$
1.7	$1.2974200122 \times 10^{-01}$	$1.3163775851 \times 10^{-04}$	$1.3929202224 \times 10^{-07}$	$1.3615884048 \times 10^{-01}$	$2.6800092716 \times 10^{-04}$	$1.0983288804 \times 10^{-06}$
1.8	$1.1692066597 \times 10^{-01}$	$3.3406363815 \times 10^{-05}$	$2.5156704460 \times 10^{-09}$	$8.3377272370 \times 10^{-02}$	$3.1402017668 \times 10^{-04}$	$5.0423268708 \times 10^{-07}$
1.9	$3.1199725859 \times 10^{-02}$	$2.6229394016 \times 10^{-06}$	$2.6472252394 \times 10^{-09}$	$5.7265477288 \times 10^{-02}$	$3.5933985680 \times 10^{-05}$	$1.6545958668 \times 10^{-08}$
2.0	$2.5175389623 \times 10^{-03}$	$1.7633090014 \times 10^{-06}$	$5.7037916005 \times 10^{-11}$	$7.4920148760 \times 10^{-03}$	$8.6795822484 \times 10^{-06}$	$1.7462304043 \times 10^{-08}$
2.1	$4.1048712013 \times 10^{-03}$	$6.5050994005 \times 10^{-08}$	$7.1374851548 \times 10^{-11}$	$2.8547336030 \times 10^{-03}$	$5.1625999631 \times 10^{-06}$	$6.0346848022 \times 10^{-10}$
2.2	$3.4060054560 \times 10^{-04}$	$1.1202439689 \times 10^{-07}$	$1.9648391489 \times 10^{-12}$	$3.0107456778 \times 10^{-03}$	$2.5349445848 \times 10^{-07}$	$6.8792884453 \times 10^{-10}$
2.3	$3.1908063319 \times 10^{-04}$	$4.1178041626 \times 10^{-09}$	$2.7238544179 \times 10^{-12}$	$5.2796166518 \times 10^{-04}$	$4.1665006440 \times 10^{-07}$	$4.8835894139 \times 10^{-11}$
2.4	$1.6416121890 \times 10^{-04}$	$8.5785121668 \times 10^{-09}$	$1.0118763143 \times 10^{-13}$	$1.7617643954 \times 10^{-04}$	$8.2250771986 \times 10^{-08}$	$3.2278123120 \times 10^{-11}$
2.5	$1.2090347328 \times 10^{-05}$	$7.7903013537 \times 10^{-10}$	$1.4704204879 \times 10^{-13}$	$2.5845945333 \times 10^{-04}$	$2.0151104609 \times 10^{-08}$	$5.1712524608 \times 10^{-12}$

TABLE S5. The error of the ground and 19th excited states calculated in bases composed of various values of ω and 40, 50, and 60 harmonic oscillator states.

λ	ϵ_0	$\epsilon_0^{(0)}$	$\epsilon_0 - \epsilon_0^{(0)}$	$\epsilon_0^{(1)}$	$\epsilon_0 - \epsilon_0^{(0)} - \epsilon_0^{(1)}$
-1	0.6209270298	0.5000000000	0.1209270298	0.1875000000	-0.0665729702
-2	0.7825872853	0.7071067812	0.0754805041	0.0937500000	-0.0182694959
-3	0.9206648830	0.8660254038	0.0546394792	0.0625000000	-0.0078605208
-4	1.0426978264	1.0000000000	0.0426978264	0.0468750000	-0.0041771736
-5	1.1530169674	1.1180339887	0.0349829786	0.0375000000	-0.0025170214
-6	1.2543454649	1.2247448714	0.0296005935	0.0312500000	-0.0016494065
-7	1.3485135506	1.3228756555	0.0256378951	0.0267857143	-0.0011478192
-8	1.4368153589	1.4142135624	0.0226017966	0.0234375000	-0.0008357034
-9	1.5202030526	1.5000000000	0.0202030526	0.0208333333	-0.0006302807
-10	1.5993998650	1.5811388301	0.0182610350	0.0187500000	-0.0004889650

TABLE S6. Comparing perturbation theory with exact results. All values are accurate to the number of digits shown.